

1.8.5 Dělení mnohočlenů

Předpoklady: 010803

Pedagogická poznámka: Během řešení příkladu 3 třídu rozdělují na dvě části. Žáci, kteří jsou schopni příklad vyřešit, pokračují v hodině dál, s žáky, kteří si s algoritmem rady nevedí, se vracíme zpět k dělení dvou čísel. Tito žáci totiž často během vysvětlování nepochopili, že dělení se sestává ze tří kroků, které neustále opakují (osvojení algoritmu realizují na úrovni základních operací s jednotlivými koeficienty mnohočlenů a celý algoritmus je tak pro ně příliš náročný). Tento okamžik je velmi vhodný pro krátkou obecnou zmínku o tom, jak si postupy pamatovat.

Mohou nastat dvě možnosti.

1. Dělení mnohočlenů jednočlenem

Jednoduché – dělíme každý člen zvlášť.

Př. 1: Vyděl mnohočleny $(9x^3y^2 - 6x^2y^2 + 12xy - 2x) : 3x$.

Dělit znamená dát mnohočleny do zlomku \Rightarrow

$$(9x^3y^2 - 6x^2y^2 + 12xy - 2x) : 3x = \frac{9x^3y^2 - 6x^2y^2 + 12xy - 2x}{3x} = \frac{9x^3y^2}{3x} - \frac{6x^2y^2}{3x} + \frac{12xy}{3x} - \frac{2x}{3x} =$$
$$3x^2y^2 - 2xy^2 + 4y - \frac{2}{3}$$

\Rightarrow Někdy výsledek je mnohočlen.

Př. 2: Vyděl mnohočleny $(8a^4 + 6a^3 + 2a^2\sqrt{3} - 14) : (-2a^2)$.

Zkusíme to stejně jako předtím.

$$(8a^4 + 6a^3 + 2a^2\sqrt{3} - 14) : (-2a^2) = \frac{8a^4 + 6a^3 + 2a^2\sqrt{3} - 14}{-2a^2} = \frac{8a^4}{-2a^2} + \frac{6a^3}{-2a^2} + \frac{2a^2\sqrt{3}}{-2a^2} + \frac{-14}{-2a^2} =$$
$$-4a^2 - 3a - \sqrt{3} + \frac{7}{a^2}$$

\Rightarrow Někdy výsledek **není** mnohočlen.

2. Dělení mnohočlenů mnohočlenem

To už je horší, podle sčítání nebo odčítání můžeme zlomek rozdělit pouze v čitateli.

Hledáme inspiraci. Jak se dělí čísla?

$2275 : 7 = 325$	$2275 : 7 = 325$	
$22 : 7 = 3$	$22 : 7 = 3$	Zajímáme se o největší cifry.
-21	-21	Zpětně vynásobíme a odečteme.
$17 : 7 = 2$	$17 : 7 = 2$	Ke zbytku připočteme další cifru.
-14	-14	Zpětně vynásobíme a odečteme.
$35 : 7 = 5$	$35 : 7 = 5$	Ke zbytku opět připočteme další cifru a tak pořád dále.

U mnohočlenů postupujeme podobně: zajímáme se o největší mocniny, zpětně vynásobíme a pak odečteme, abychom věděli, co zbývá atd.

Napodobíme postup, dělíme $(x^5 - 3x^2 - 4x + 6) : (x^2 - 2)$.

- Vydělíme členy s největšími mocninami: $x^5 : x^2 = x^3$.
- Získaným jednočlenem vynásobíme celý dělitel (zpětné násobení):
 $x^3 \cdot (x^2 - 2) = x^5 - 2x^3$.
- Od původního mnohočlenu odečteme výsledek zpětného násobení:
 $(x^5 - 3x^2 - 4x + 6) - (x^5 - 2x^3) = 2x^3 - 3x^2 - 4x + 6$.
- S výsledkem opakujeme předchozí postup.

Pedagogická poznámka: Předchozí odstavec na tabuli nepíšu, uvádím pouze následující zkrácený zápis.

Ještě předtím, než začnu s vysvětlováním, upozorním žáky, že:

jde o netriviální algoritmus, který je nutné pochopit vcelku, důležitou roli hraje zápis, který, pokud je dobře provedený, značně ulehčuje orientaci (a tím výpočet), v opačném případě naopak přispívá k neúspěchu.

S úpravou mají největší problém rozmáchlíci, kteří píšou obrovská písmena a pak se jim na jednu řádku nevejde celý potřebný postup.

Zkrácený zápis (s barevným odlišením jednotlivých kroků):

$$\begin{array}{r}
 (x^5 - 3x^2 - 4x + 6) : (x^2 - 2) = x^3 + 2x - 3 \\
 \underline{-(x^5 - 2x^3)} \\
 2x^3 - 3x^2 - 4x + 6 \\
 \underline{-(2x^3 - 4x)} \\
 -3x^2 + 6 \\
 \underline{-(-3x^2 + 6)} \\
 0
 \end{array}$$

Po posledním odečítání vyšel nulový mnohočlen \Rightarrow dělili jsme beze zbytku.

Jak se přesvědčíme o správnosti výsledku?

Zpětné vynásobení:

$$(x^3 + 2x - 3)(x^2 - 2) = x^5 - 2x^3 + 2x^3 - 4x - 3x^2 + 6 = x^5 - 3x^2 - 4x + 6$$

⇒ počítali jsme správně.

Pedagogická poznámka: Zbytek hodiny je myšlen jako samostatná práce studentů, přesto minimálně 3. příklad počítám v malém závěsu za třídou na tabuli. Většina žáků všechno nestihne, jim zůstávají příklady za domácí úkol. V pochopení jsou nejčastější problémy s dělením členů s nejvyššími mocninami (Proč? - aby se stupeň mocniny po každém dělení o jedna snížil). V praktickém výpočtu pak s odčítáním mnohočlenů po zpětném dělení.

Př. 3: Vyděl mnohočleny $(2x^3 + 5x^2 - 5x + 1) : (2x - 1)$.

$$\begin{array}{r} (2x^3 + 5x^2 - 5x + 1) : (2x - 1) = x^2 + 3x - 1 \\ -(2x^3 - x^2) \\ \hline 6x^2 - 5x + 1 \\ -(6x^2 - 3x) \\ \hline -2x + 1 \\ -(2x - 1) \\ \hline 0 \end{array}$$

Platí: $(2x^3 + 5x^2 - 5x + 1) : (2x - 1) = x^2 + 3x - 1$.

Př. 4: Vyděl mnohočleny $(6x^6 - 8x^5 + 14x^4 - 21x^3 + 3x^2 + 8x - 14) : (3x^3 - x^2 + 2) =$

$$\begin{array}{r} (6x^6 - 8x^5 + 14x^4 - 21x^3 + 3x^2 + 8x - 14) : (3x^3 - x^2 + 2) = 2x^3 - 2x^2 + 4x - 7 \\ -(6x^6 - 2x^5 + 4x^3) \\ \hline -6x^5 + 14x^4 - 25x^3 + 3x^2 + 8x - 14 \\ -(-6x^5 + 2x^4 - 4x^2) \\ \hline 12x^4 - 25x^3 + 7x^2 + 8x - 14 \\ -(12x^4 - 4x^3 + 8x) \\ \hline -21x^3 + 7x^2 - 14 \\ -(-21x^3 + 7x^2 - 14) \\ \hline 0 \end{array}$$

Platí: $(6x^6 - 8x^5 + 14x^4 - 21x^3 + 3x^2 + 8x - 14) : (3x^3 - x^2 + 2) = 2x^3 - 2x^2 + 4x - 7$

Pedagogická poznámka: V následujících příkladech jsou malé zádrhele. Snažím se tím o to, aby si algoritmus dělení u žáků zachoval alespoň nějakou flexibilitu, žáci mají tendenci ho zcela zautomatizovat a zmechanizovat.

Př. 5: Vyděl mnohočleny $(x^6 + x^3 + 5 - 2x^4 - 2x) : (x + x^3 - 2)$.

Nejdřív si musíme oba mnohočleny seřadit a pak dělíme:

$$\begin{array}{r} (x^6 - 2x^4 + x^3 - 2x + 5) : (x^3 + x - 2) = x^3 - 3x + 3 \\ \underline{-(x^6 + x^4 - 2x^3)} \\ -3x^4 + 3x^3 - 2x + 5 \\ \underline{-(-3x^4 - 3x^2 + 6x)} \\ 3x^3 + 3x^2 - 8x + 5 \\ \underline{-(3x^3 + 3x - 6)} \\ 3x^2 - 11x + 11 \end{array}$$

Výraz $3x^2 - 11x + 11$ už nejde dál dělit \Rightarrow

$$(x^6 + x^3 + 5 - 2x^4 - 2x) : (x + x^3 - 2) = x^3 - 3x + 3 + \frac{3x^2 - 11x + 11}{x^3 + x - 2}.$$

Pedagogická poznámka: Někteří studenti přijdou na to, že mají mnohočleny seřadit. Někteří je neseřadí, a přesto dokáží příklad spočítat (ty upozorňuji, že si mohli práci podstatně zjednodušit). Ty, kteří mnohočleny neseřadí a nedokáží počítat správně, upozorním, aby se příliš dlouho netrápili zbytečně.

Př. 6: Vyděl mnohočleny $(x^7) : (x^2 - 2x + 3)$.

$$\begin{array}{r} (x^7) : (x^2 - 2x + 3) = x^5 + 2x^4 + x^3 - 4x^2 - 11x - 10 \\ \underline{-(x^7 - 2x^6 + 3x^5)} \\ 2x^6 - 3x^5 \\ \underline{-(2x^6 - 4x^5 + 6x^4)} \\ x^5 - 6x^4 \\ \underline{-(x^5 - 2x^4 + 3x^3)} \\ -4x^4 - 3x^3 \\ \underline{-(-4x^4 + 8x^3 - 12x^2)} \\ -11x^3 + 12x^2 \\ \underline{-(-11x^3 + 22x^2 - 33x)} \\ -10x^2 + 33x \\ \underline{-(-10x^2 + 20x - 30)} \\ 13x + 30 \end{array}$$

Výraz $13x + 30$ už nejde dál dělit. \Rightarrow

$$(x^7):(x^2-2x+3) = x^5 + 2x^4 + x^3 - 4x^2 - 11x - 10 + \frac{13x+30}{x^2-2x+3}$$

Pedagogická poznámka: Předchozí a následující příklad vyvolávají u velké části studentů tím, jak vypadají, pocit, že jde o něco úplně jiného než předchozí příklady a tudíž není možné je řešit stejným způsobem. Je dobré si popovídat o tom, že jsou v podstatných věcech stejné jako příklady předchozí, že jde stále o dělení mnohočlenů, že náš postup neměl žádné speciální podmínky a proto je možné ho použít i v tomto případě.

Př. 7: Vyděl mnohočleny $(a^3 + b^3):(a + b)$.

Problém: Ve výrazech jsou dvě neznámé. I neznámá je jenom nějaké číslo (i když nevíme jaké) \Rightarrow budeme se chovat jako kdyby a byla neznámá a b nějaké číslo (třeba 2).

$$\begin{array}{r} (a^3 + b^3):(a + b) = a^2 - ab + b^2 \\ -(a^3 + a^2b) \\ \hline -a^2b + b^3 \\ -(a^2b - ab^2) \\ \hline ab^2 + b^3 \\ -(ab^2 + b^3) \\ \hline 0 \end{array}$$

Pedagogická poznámka: Stejně jako u převádění mezi číselnými soustavami jde u dělení mnohočlenů o pochopení algoritmu, který se pak neustále opakuje. Kvůli cvičení pamatování je dobré další hodinu zahájit příkladem na dělení, velká část třídy nebude schopna algoritmus opět použít.

Shrnutí: Mnohočleny je možné dělit postupem, který je podobný běžnému dělení dvou čísel.